

1. ÚPRAVY VÝRAZOV

Algebraický výraz, definičný obor výrazu. Počítanie s mnohočlenmi, úprava racionálnych výrazov, práca s odmocninami.

Príklady:

1. Určte definičný obor výrazu:

a) $\frac{\sqrt{x+5}}{x^2+3x-4}$

b) $\sqrt{\log_{x+1} x}$

2. Určte definičný obor výrazu a zjednodušte ho:

a) $\left[\frac{4x^3}{x^3-y^3} : \frac{2x^3}{x^2-2xy+y^2} \right] \cdot \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-y^2}$

b) $\frac{x^4-y^4}{x^2y^2} : \left[\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) \cdot \left(1-\frac{2x}{y}+\frac{x^2}{y^2}\right) \right]$

3. Rozložte na súčin lineárnych dvojčlenov v R, resp. v C:

a) x^3-2x^2+x-2

b) x^3+3x^2-2x-6

c) $x^2-7x+12$

e) $x^2+6x+18$

Riešte v C rovnicu: $x^3-2x^2+x-2=0$.

Riešte v R nerovnicu: $x^3+3x^2-2x-6<0$.

4. Upravte na výraz bez odmocniny v menovateli:

a) $\frac{42}{7-\sqrt{7}}$

b) $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

c) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{24}-\sqrt{6}-\sqrt{12}}$

Udajte podmienky riešiteľnosti a zjednodušte:

d) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}} \cdot (\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y})$

e) $(\sqrt{2}+1) \cdot \sqrt{3-2\sqrt{2}}$

5. V rozvoji podľa binomickej vety vypočítajte: a) siedmy člen výrazu $(x-i\sqrt{2})^{10}$;

b) absolútny člen výrazu $\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^6$

6. Rozložte daný zlomok na súčet zlomkov s danými menovateľmi:

$$\frac{1}{(x+1)(2x-1)}; \quad \frac{A}{x+1}; \quad \frac{B}{2x-1}$$

7. Pre $a, b \in \mathbb{R}$ zjednodušte daný výraz a udajte podmienky riešiteľnosti:

$$\left[\left(\frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{a}} \right)^{\frac{1}{4}} : \left(\frac{2a^{-1}}{\sqrt[4]{2a^4}} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left[\frac{3\sqrt[4]{a^{\frac{5}{2}}} \cdot (6a)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt[6]{27}} \right]^{-1}$$

8. Pre $a, b \in \mathbb{R}$ zjednodušte daný výraz a udajte podmienky riešiteľnosti:

$$\left[(a^{0.5} + \sqrt{b})^2 - \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a^{\frac{2}{3}} - b^{1.5}} \right)^{-1} \right] \cdot (a \cdot b)^{-0.5}$$

2. RIEŠENIE ROVNÍC

Rovnica, ekvivalentné úpravy a dôsledkové úpravy rovníc, skúška ako súčasť riešenia. Riešenie lineárnej a kvadratickej rovnice, rovníc s neznámou v menovateli, pod odmocninou, v absolútnej hodnote.

Príklady :

1. Úpravou na súčinový tvar riešte rovnice v R :

a) $(x + 2)^3 - x - 2 = 0$

b) $2x^3 - 7x - 2 = 0$ Návod : Jedným z činiteľov je $(x - 2)$.

2. Riešte rovnice v R :

a) $|x| = \sqrt{2}$

b) $|x + 3| = 2$

c) $\frac{x+3}{4} - \frac{|x-4|}{9} = \frac{1}{2} - \frac{x+5}{36}$

d) $|x-1| = 2|x-4|$

e) $2|x| - |x+1| = 2$

3. Riešte v R :

a) $\sqrt{x^2 + 3} = x - 1$

b) $x + \sqrt{x^2 - 9} = 21$

c) $\sqrt{x-6} - \sqrt{x+2} = 2$

d) $\sqrt{x + \sqrt{2x}} + \sqrt{x - \sqrt{2x}} = x$

4. Jeden robotník zhotoví súčiastku o 4 hodiny, druhý o 9 hodín neskôr, ako by ju zhotovili spoločne. Za aký čas zhotoví súčiastku každý sám ?

5. Nech s, t sú oba korene rovnice $x^2 - 4x + 1 = 0$. Vypočítajte racionálne číslo $\frac{1}{t} + \frac{1}{s}$.

6. Riešte v R : $1 + \frac{2x}{x+4} + \frac{27}{2x^2 + 7x - 4} = \frac{6}{2x-1}$

7. Riešte v N : $\frac{1}{x} + \frac{1}{2 - \sqrt{4-x^2}} = \frac{2}{2 + \sqrt{4-x^2}}$

8. Použitím substitúcie riešte v Z rovnicu : $(x^2 + 2x + 3) \cdot (x^2 + 2x + 4) - 6 = 0$

9. Riešte v R : $4x^5 + 12x^4 + 11x^3 + 11x^2 + 12x + 4 = 0$

3. RIEŠENIE NEROVNÍC

Nerovnice, úpravy nerovnic. Riešenie lineárnych a kvadratických nerovnic. Nerovnice s neznámou v absolútnej hodnote.

Príklady:

1. V \mathbb{R} riešte nerovnice:

a) $\left|x + \frac{1}{2}\right| < 0,1$

b) $2x > 3 - |x+1|$

c) $|3x-2| - 5 \geq |x+1|$

d) $|x^2 + 3x + 2| < 2x + 4$

2. Riešte v \mathbb{R} :

a) $x^2 \leq 0$

b) $(x+3)^2 > \sqrt{5}$

c) $x^2 - 4x + 3 > 0$

d) $-5x^2 + 3x + 2 > 0$

3. Určte definičné obory funkcií:

a) $f: y = \sqrt{2x^2 + 3x - 14}$

b) $g: y = \log(2x^2 + 3x - 14)$

4. Určte všetky hodnoty $k \in \mathbb{R}$, pre ktoré je riešením sústavy

$$x + ky = 3$$

$$kx + 4y = 6$$

taká usporiadaná dvojica čísel x, y , že platí:

$$x > 1 \quad \text{a súčasne} \quad y > 1$$

5. Výpočtom i graficky riešte $|x+1| + |x-1| \leq 4$

6. Riešte v \mathbb{R} nerovnice:

a) $|x+2| \leq -2$

b) $|5x-8| < 15$

c) $\frac{6}{2x+1} - 3 > 0$

d) $\frac{x^2-1}{x+2} \leq 0$

e) $x \cdot \log(4x-3) > 0$

f) $\frac{4x^2+1}{x^2-2x-3} \geq 0$

7. V \mathbb{Z}_0^+ riešte:

a) $\frac{2x-3}{2} + 5 > 3x - \frac{2-x}{3} > 2 + \frac{x+3}{6}$

b) $1 < \frac{4x-1}{5-x} < 4$

8. Riešte v \mathbb{Z} :

a) $x^2 - |5x-3| - x < 2$ b) $|x^2 - 2x - 3| < x+1$ c) $\frac{x^2+3x-10}{x-1} < 10$

9. Ktoré hodnoty môže nadobúdať číslo m , ak majú korene rovnice $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ hodnoty z intervalu $\langle -3; 5 \rangle$?

4. SÚSTAVY ROVNÍC A NEROVNÍC

Sústavy rovníc, sústavy nerovnic. Riešenie sústav rovníc, sústav nerovnic a sústav rovníc a nerovnic výpočtovým postupom a graficky

Príklady:

1. Riešte v \mathbb{Z} : $\left(x + 2 \geq \frac{2x - 8}{6} - \frac{18 - 4x}{3} \right) \wedge \left(9 - \left(\frac{x - 2}{4} + \frac{2}{3} \right) < x + \frac{1}{2} \right)$

2. Riešte v \mathbb{R} : $-6 < x^2 + 5x < -4$

3. Riešte v \mathbb{R}^2 výpočtom aj graficky:

a) $2x - y = 3$ b) $x - y = 5$ c) $2x - y = 5$
 $x - 0,5y = 1,5$ $-2x + 2y = -8$ $x + 3y = 6$

4. Riešte v \mathbb{N}^2 : $2x - 3y + 6 = 0$
 $x^2 + y^2 - 25 = 0$

5. Riešte v \mathbb{R}^3 :

a) $x + 2y - 3z = -1$ b) $x + y + z = 2$
 $-3x + y - 2z = 2$ $x + 2y = 1$
 $2x + 3y + 2z = 11$ $y - z = -1$

6. Aké dlhé sú strany trojuholníka, ak súčet vždy dvoch susedných strán je 38, 46, 42

7. Riešte graficky v \mathbb{R}^2 : $|x| \geq 1$
 $x + y > 0$.

8. Vhodnou substitúciou riešte v \mathbb{R}^2 :

$$\frac{12}{\sqrt{x-1}} + \frac{5}{\sqrt{y+0,25}} = 5$$

$$\frac{4}{\sqrt{x-1}} + \frac{5}{\sqrt{y+0,25}} = 3$$

9. Riešte v \mathbb{R}^2 sústavy rovníc:

a) $\log x + \log y = 5$

$$\frac{2 \log x}{\log y} - \frac{3 \log y}{\log x} = 1$$

b) $3^{2x} - 2^y = 77$
 $3^x - 2^{y/2} = 7$

c) $x - y \sqrt{x + y} = 2\sqrt{3}$
 $(x + y) \cdot 2^{y-x} = 3$

5. ÚLOHY S PARAMETROM.

Parameter. Riešenie lineárnych a kvadratických rovníc a ich sústav s parametrom. Skúmanie funkcií určených parametricky. Slovné parametrické úlohy.

Príklady:

1. Riešte v R rovnice s parametrom t :

a) $t^2x + 1 = t + x$

b) $tx - \frac{2}{t^2} = (4x + 1) \cdot \frac{1}{t}$

2. Riešte v R rovnicu: $p + 1 = \frac{p^2 - 1}{x}$; x - neznáma, p - parameter

3. Riešte v R nerovnice s parametrom b :

a) $bx + x \leq b^2 - 1$

b) $(x + b)^2 < x^2 + 1$

4. V R riešte lineárnu nerovnicu s absolútnou hodnotou:

$$|x - 1| < x + a$$

(x - neznáma, a je reálny parameter).

5. Určte všetky tie hodnoty parametra $a \in R$, pre ktoré je číslo $x = 3(1 + a)$

riešením rovnice $|3 - x| + |2x - 3a| = 6$.

6. Vypočítajte, pre ktoré hodnoty parametra $a \in R$ má rovnica

$$(a + 10)x^2 - 6x - a = 0$$

dva rôzne reálne korene.

7. Riešte v R kvadratickú rovnicu s parametrom m :

$$(1 - m)x^2 + 2mx - m = 0.$$

8. V R riešte nerovnicu s parametrom $a \in R$:

$$(x - 2a) \cdot (3ax + 1) \geq 0.$$

9. V R riešte sústavu lineárnych rovníc s parametrom $p \in R$:

$$px - y = p,$$

$$x - py = -p.$$

10. Určte hodnotu parametra $a \in R$, pre ktorú daná sústava rovníc nemá riešenie: $3x + 2y = 5$,
 $ax - 5y = 1$.

11. Určte všetky hodnoty parametra $a \in R$ také, aby priesečník priamok

$p: x + 2y = a$, $q: 2x + y = 1$ bol vnútorným bodom prvého kvadrantu.

6. FUNKCIE

Definícia funkcie, obory a grafy funkcií. Základné vlastnosti funkcií – monotónnosť, párnosť, nepárnosť, periodičita, ohraničenosť. Racionálne funkcie, lineárna a kvadratická funkcia, nepriama úmernosť, racionálna lomená funkcia – definícia, obory, vlastnosti, grafy.

Príklady:

1. Určte definičné obory funkcií:

a) $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x-3}$ b) $y = \sqrt{\frac{x+2}{x-3}}$ c) $y = \frac{1}{x^2 - x - 6}$

d) $y = \sqrt{1-|x|}$ e) $y = \frac{1}{\sin x}$ f) $y = \frac{1}{\log(3-x)}$

g) $y = \sqrt{\frac{1}{\log_3(3-2x)}}$

2. Daná je funkcia $p: y = \frac{\sqrt{2x-11}}{4-x}$. Určte $p(6)$ a zistite, či $1 \in H(p)$.

3. Načrtnite grafy funkcií :

a) $f: y = |x+1| - x; x \in \langle -2; 0 \rangle$,

b) $g: y = |x| - |x-2|; x \in \langle -1; 3 \rangle$,

c) $h: y = |x^2 - 2x - 7|$.

Na základe grafov určte obory hodnôt daných funkcií.

4. Určte a dokážte párnosť, resp. nepárnosť funkcií :

a) $y = \frac{|x|}{|x|+1}$

b) $g: y = x + x^3$

5. Zistite či funkcia $f: y = 4 - \sqrt{x-3}$ je rastúca, alebo klesajúca. Ak existuje funkcia k funkcii f inverzná, určte ju.

6. Dokážte monotónnosť funkcie:

a) $f: y = -2x + 3$

b) $g: y = \frac{x}{x+1}$

7. Vyšetrite ohraničenosť funkcie $f: y = \left| \frac{-3}{x} \right|$.

8. Rozhodnite, či funkcia $f: y = x^2 - 4x + 5$ je ohraničená na množine $\langle -5, 5 \rangle$. Zdôvodnite!

9. Kvadratická funkcia je daná takto: $f(0) = -8$, $f(1) = -15$, $f(-1) = -3$. Zostrojte graf a určte vlastnosti funkcie f .

10. Zostrojte graf a určte vlastnosti funkcie $g: y = \frac{3-x}{x-1}$. Riešte v \mathbb{R} nerovnicu $\frac{3-x}{x-1} \geq 0$

a výsledok ilustrujte na grafe funkcie g . Načrtnite graf funkcie $g': y = \left| \frac{3-x}{x-1} \right|$.

7. INVERZNÉ FUNKCIE.

Pojem inverznej funkcie, vzťah navzájom inverzných funkcií. Exponenciálna a logaritmická funkcia – ich definícia, vlastnosti a grafy. Riešenie logaritmických a exponenciálnych rovníc a nerovníc.

Príklady:

1. Určte inverzné funkcie k funkciám :

a) $y = 2x + 3, x \in \langle 1; 3 \rangle$ b) $y = x^2, x \in \langle 0; \infty \rangle$ c) $y = 5^x$

d) $y = \log x$ e) $y = \frac{3^x}{1 + 3^x}$

2. Načrtnite grafy funkcií f: $y = 2^x$, g: $y = 0,5^x$. Rozhodnite a zdôvodnite, ktoré tvrdenia sú pravdivé:

a) $2^{1,5} > 2^{0,7}$ b) Ak $0,5^a < 0,5^b$, potom $a > b$.

3. Riešte v R rovnice a nerovnice:

a) $\frac{1}{3^{5x+1}} = 81$

b) $3(4^x + 9^{x+1}) = 2(3 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{4} \cdot 9^{x+1})$

c) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3}$

d) $3 \cdot 3^x + 4 \cdot 3^{x+1} + 5 \cdot 3^{x+2} = 405 \cdot 2^{x-1}$

d) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3x^2-1}{2}} \leq \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{x^2+1}{3}}$

4. Vypočítajte súradnice všetkých priesečníkov grafov funkcií:

$f(x) = 2 \cdot 2^{2x} + 2$, $g(x) = 9 \cdot 2^x - 2$.

5. Načrtnite grafy funkcií f: $y = \log_{0,5} x$, g: $y = \log_2 x$. Rozhodnite a zdôvodnite, ktoré tvrdenia sú pravdivé:

a) $\log_2 4,1 > \log_2 0,7$ b) Ak $\log_{0,5} k > \log_{0,5} h$, potom $k < h$.

6. Určte definičný obor funkcie f: $y = \sqrt{1 - \log \frac{1-x}{1+x}}$.

7. Bez kalkulačky vypočítajte:

a) $3^{\log_3 2}$

b) $\log_8 (2\sqrt{2})^{-1}$

c) $4 \cdot \log_6 3 + 5 \cdot \log_6 2 - \log_6 12$

8. Závislosť číselnej hodnoty p tlaku nasýtených vodných pár od číselnej hodnoty T absolútnej teploty vyjadruje vzťah:

$p = a \cdot b^{\frac{T}{c+T}}$, kde a, b, c sú kladné konštanty rôzne od 1. Vyjadrite, ako závisí T od p.

9. Riešte v R rovnice a nerovnice:

a) $\frac{\log(x^2 + 7)}{\log(x + 7)} = 2$

b) $\log(3 + 2\log(x + 1)) = 0$

c) $\log^2 x - \log x = 0$

d) $\log_2(3^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$

e) $\log_3^2 x + \log_3 x \geq 2$

f) $\log_{0,5}(x^2 - x - 12) > \log_{0,5}(x + 3)$

10. Riešte v R x R sústavy rovníc:

a) $2^x + 3^{y+1} = 35$

b) $\log_3 x + \log_3 y = 0$

$2^{x+1} + 3^y = 25$

$x + y = \frac{10}{3}$

8. GONIOMETRICKÉ FUNKCIE

Definícia goniometrických funkcií, ich vlastnosti, obory a grafy. Vzťahy medzi goniometrickými funkciami, úprava výrazov s goniometrickými funkciami. Riešenie goniometrických rovníc a nerovnic.

Príklady:

- a) Ktorý bod jednotkovej kružnice priradíme číslu $x = \frac{11}{2}\pi$?
b) Vypočítajte : $\operatorname{tg} \frac{22}{3}\pi$, $\operatorname{cotg}(-\frac{2}{3}\pi)$, $\cos \frac{7}{6}\pi$, $\sin(-\frac{11}{4}\pi)$.
c) Rozhodnite, či platí: a) $\sin 60^\circ < \sin 65^\circ$; b) $\operatorname{tg}(-42^\circ) = \operatorname{tg} 318^\circ$.
- Načrtnite grafy funkcií:
a) $g : y = 2\cos(x + \frac{\pi}{4})$ b) $h : y = \sin(2x - \pi)$
- Riešte v \mathbb{R} rovnice a nerovnice :
a) $\sin(\frac{\pi}{3} - x) = \frac{1}{2}$ b) $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$
c) $\sin 2x = \cos 3x \cdot \sin 2x$ d) $2\cos^2 x - 7\sin x < 5$
e) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 1 < 0$
- Riešte graficky nerovnicu
 $|\cos x| \geq \frac{1}{2}$ na intervale $\langle -\pi, \pi \rangle$.
- Určte hodnotu funkcie $f : y = \frac{5\sin x + \cos x}{2\cos x - 3\sin x}$ pre $\operatorname{tg} x = 5$.
- Určte hodnoty ostatných goniometrických funkcií, ak platí :
 $\sin x = -0,6$; $x \in \langle \pi, \frac{3}{2}\pi \rangle$.
- Dokážte identitu :
 $\cos x + \cos(x + \frac{2}{3}\pi) + \cos(x + \frac{4}{3}\pi) = 0$
- Dokážte rovnosť a určte, pre aké $x \in \mathbb{R}$ má zmysel : $\frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{2}\sin 2x$.
- Zjednodušte a určte definičný obor výrazu:
 $V(x) = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} + \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$
- Riešte rovnicu v \mathbb{R} : $\sin 3x + \sin x = \sin 4x + \sin 2x$.
- Určte definičný obor funkcie:
a) $f : y = \sqrt{\log(\cos x)}$
b) $g : y = \frac{\sqrt{\cos x - \frac{1}{2}}}{\sqrt{6 + 35x - 6x^2}}$