

Ukážky maturitných otázok z matematiky - TEÓRIA

Základy matematiky:

- Vysvetlite obsah pojmov výrok, pravdivostná hodnota výroku, negácia výroku. Popíšte ako sa negujú kvantifikované a zložené výroky. Svoje vedomosti môžete interpretovať na výrokoch:
A: Existuje aspoň jeden rovnoramenný trojuholník, ktorý má dva pravé uhly.
B: Každá kvadratická rovnica má najviac dva reálne korene.
C: Pre každé dve reálne čísla x_1, x_2 platí, ak $x_1 < x_2$ potom $f(x_1) < f(x_2)$
- Definujte zjednotenie množín, prenik množín, rozdiel množín a doplnok množiny. Svoje vedomosti môžete interpretovať na množinách: $A = \langle -2; 3 \rangle$, $B = (0; 5)$, $C = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 2\}$
- Objasnite pojmy: konštanta, premenná, výraz, obor definície výrazu, hodnota výrazu., svoje vedomosti môžete interpretovať na výrazoch:
$$A(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2 - 2} \qquad B(x) = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \cos^2 x}$$
- Vysvetlite pojmy: mnohočlen, člen, stupeň, koeficient, hodnota mnohočlena, svoje vedomosti môžete dokumentovať na týchto mnohočlenoch:
 $A(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x + 7$ $B(x) = 3 - 2x^2$ $C(x) = 5x^4 - 8x + 3x$
- Vysvetlite pojmy prvočíslo, zložené číslo, deliteľ, násobok, najväčší spoločný deliteľ, najmenší spoločný násobok, sformulujte pravidlá deliteľnosti. Pravidlá deliteľnosti môžete dokumentovať napr. na čísle 3972.
- Popíšte pravidla pre sčítanie, násobenie, delenie mnohočlenov, rozklad mnohočlena na súčin, doplnenie mnohočlena na štvorec. Svoje vedomosti môžete interpretovať na mnohočlenoch:
 $x^2 - 0,6x$ $x^2 - 6$ $x^2 + 5x - 50$
- Vysvetlite pojmy neznáma, rovnica, nerovnica, obor premennej, množina všetkých koreňov, ekvivalentné a neekvivalentné úpravy pri riešení rovníc a nerovnic, kontrola riešenia – skúška. Svoje vedomosti môžete interpretovať na rovnici:
$$3x^2 + x - 10 = 0$$
- Objasnite vzťah medzi diskriminantom a počtom koreňov kvadratickej rovnice. Uved'te vzťahy medzi koreňmi kvadratickej rovnice a jej koeficientami.

Funkcie:

- Vysvetlite obsah pojmov: definičný obor funkcie, obor hodnôt funkcie. Môžete pri tom použiť funkciu $f: y = \frac{1}{x^2 - 1}$.
Pomocou intervalov určte jej definičný obor, vypočítajte funkčné hodnoty v bodoch 2, 4, 8 a zistite, či $1 \in H(f)$; $-2 \in H(f)$
- Narysujte závislosť medzi číslami x a y ak viete:
a) y je o 7 väčšie ako x b) y je o 8 menšie ako x
Akou funkciou sú vyjadrené závislosti? Z grafu odčítajte vlastnosti funkcií.
- Napíšte predpis vyjadrujúci kvadratickú funkciu. Vysvetlite význam použitých symbolov. Nájdite predpis kvadratickej funkcie, ak viete, že platí: $f(1) = -2$; $f(2) = 4$; $f(3) = 4$

4. Napíšte predpis vyjadrujúci lineárnu lomenú funkciu.
Z grafu funkcie $f: y = 3 + \frac{2}{x-1}$ vyčítajte jej vlastnosti. Sformulujte ich.
5. Napíšte predpis vyjadrujúci lineárnu lomenú funkciu.
Z grafu funkcie $f: y = \frac{-2x-5}{x+1}$ vyčítajte jej vlastnosti. Sformulujte ich.
6. Vysvetlite pojem „inverzná“ funkcia. Akú vlastnosť musí mať funkcia, aby k nej existovala inverzná funkcia? Aký je vzťah medzi grafom funkcie a jej inverznej funkcie? Pre demonštráciu môžete použiť funkcie f a g : $f: y = 3x - 4$; $g: y = \frac{-3}{x+1}$
7. Uveďte predpis pre mocninovú funkciu. Vysvetlite význam použitých symbolov. Na základe určenia priebehu mocninových funkcií (napr. $y = x^2$; $y = x^3$; $y = x^4$; $y = x^5$...) sformulujte vlastnosti mocninových funkcií pre $n \in \mathbb{N}$
8. Určte definičné obory a obory hodnôt funkcií: $f(x) = 7 - x^8$; $g(x) = 11 + (x-8)^4$
9. Uveďte predpis pre exponenciálnu funkciu. Načrtnite jej graf a popíšte jej vlastnosti – definičný obor, obor hodnôt, monotónnosť, ohraničenosť, maximum, minimum.
10. Daná je funkcia $f(x) = 3^x$
- určte jej funkčné hodnoty pre $x \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$
 - načrtnite graf f a opíšte jej vlastnosti
 - načrtnite graf funkcie, ktorá je ku f inverzná (ak existuje)
 - určte predpis inverznej funkcie a opíšte jej vlastnosti
11. a) Určte: $\log_7 49$; $\log_{\frac{1}{2}} 4$; $\log_2 \sqrt{2}$; $\log_{10} \sqrt[5]{10000}$
- b) Nájdite číslo x , ak platí: $\log_{10} x = -1$; $\log_{\sqrt{2}} x = 4$; $\log_{\frac{1}{2}} x = -1$
- c) Určte hodnotu výrazu: $x = \log_5 625 + \log_2 64^3 + \log_3 \frac{1}{9}$
12. Načrtnite graf funkcie $y = \sin x$, $x \in (-\pi; 2\pi)$. Čo vieme z tohoto grafu vyčítať?
- akú maximálnu hodnotu nadobúda funkcia $\sin x$?
 - Koľko je $\sin 5\pi$
 - Je funkcia $y = \sin x$ na intervale $\langle 0; \pi \rangle$ rastúca?
 - Vieme, že $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Nájdite ešte niekoľko uhlov (čísel x), pre ktoré $\sin x = \frac{1}{2}$
13. Vypočítajte $\operatorname{tg} x$, ak viete, že: a) $\sin x = \frac{4}{5}$; $x \in \left\langle 2\pi; \frac{5}{2}\pi \right\rangle$ b) $\cos x = -\frac{5}{13}$; $x \in \left\langle -\pi; -\frac{\pi}{2} \right\rangle$
14. Postupnosť je daná vzorcom pre n -tý člen. Napíšte prvých 5 členov tejto postupnosti a načrtnite jej graf.
- $a_n = n \cdot 2^{-n}$
 - $a_n = \frac{n-1}{n+1}$
 - $a_n = n \cdot (-1)^{n+1}$
15. Čísla $\sqrt{5} - \sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ sú tri za sebou idúce členy postupnosti. Môže byť táto postupnosť aritmetická? A geometrická? (odôvodnite)

16. Uveďte predpis pre logaritmickú funkciu. Načrtnite jej graf a popíšte jej vlastnosti – definičný obor, obor hodnôt, ohraničenosť, monotónnosť, maximum, minimum, priesečníky s osou o_x a o_y .
17. Definujte funkcie kosínus a kotangens pomocou jednotkovej kružnice. V karteziánskej sústave súradníc načrtnite ich grafy a popíšte ich vlastnosti.
18. Definujte funkcie sínus a tangens pomocou jednotkovej kružnice. V karteziánskej sústave súradníc načrtnite ich grafy a popíšte ich vlastnosti.
19. Vyslovte definíciu aritmetickej postupnosti. Napíšte vzťahy medzi členmi aritmetickej postupnosti a vzťah vyjadrujúci súčet jej n – členov.
20. Vyslovte definíciu geometrickej postupnosti. Napíšte vzťahy medzi členmi geometrickej postupnosti a vzťah vyjadrujúci súčet jej n – členov.
21. Napíšte predpis vyjadrujúci lineárnu funkciu a popíšte jej vlastnosti. Aký predpis má lineárna funkcia, ak viete, že $f(1) = -1$; $f(-2) = 8$?
22. Definujte dekadický logaritmus čísla (napr. $\log_{10}100$). Uveďte pravidlá pre logaritmovanie súčinu, podielu a mocniny. Pravidlá môžete demonštrovať na ľubovoľných príkladoch.

Planimetria:

1. Množiny bodov daných vlastností

Popíšte základné množiny bodov daných vlastností v rovine.

Množinu bodov danej vlastnosti môžete dokumentovať na príkladoch :

- a) Úsečka AB s dĺžkou 6 cm; kružnica $k_l = \{X \in \rho, |AX| = 2 \text{ cm}\}$

Narysujte tieto množiny bodov daných vlastností v rovine ρ .

- b) Daná je priamka p a bod A tak, že $|Ap| = 4$ cm. Zostrojte všetky body X , pre ktoré platí :
 $|AX| = |Xp| = 4$ cm.

2. Základné útvary v rovine

Popíšte základné rovinné útvary – bod, priamka, polpriamka, úsečka, polrovina, rovina.

3. Vzájomná poloha dvoch priamok, priamky a kružnice, dvoch kružníc

Klasifikujte vzájomnú polohu priamky a kružnice a vzájomnú polohu dvoch kružníc

4. Obvody a obsahy základných útvarov v rovine

Popíšte obvody a obsahy základných rovinných útvarov.

5. Základné prvky trojuholníka

Popíšte rozdelenie trojuholníkov, výšky a ťažnice trojuholníkov, polomer vpísanej a opísanej kružnice trojuholníku.

6. Uhly v útvaroch

Popíšte dvojice uhlov. Popíšte uhly v kružnici a uhly v pravidelnom n -uholníku.

Vlastnosti uhlov môžete interpretovať na príkladoch.

- a) V trojuholníku ABC je vonkajší uhol $\beta' = 100^\circ$ a pre jeho vnútorné uhly platí : $\gamma = \alpha + 40^\circ$.
Určte veľkosť vnútorných uhlov v trojuholníku ABC .
- b) Určte veľkosti vnútorných uhlov ciferníkového trojuholníka (4, 9, 12).

7. **Zhodnosť a podobnosť útvarov**

Definujte zhodnosť a podobnosť útvarov.

Podobnosť útvarov môžete interpretovať na príklade:

Dve kocky sú navzájom podobné. Ich koeficient podobnosti je $p = 2$. Aký bude pomer podobnosti ich a) povrchov, b) objemov ?

8. **Zhodnosť a podobnosť trojuholníkov**

Vyslovte vety o zhodnosti a podobnosti trojuholníkov.

Podobnosť trojuholníkov môžete ukázať na príklade:

Zostrojte trojuholník ABC , ktorého strany a, b, c sú v pomere $a : b : c = 3 : 5 : 4$, $v_c = 5$ cm.

9. **Zhodné zobrazenia v rovine .**

Vymenujte a popíšte zhodné zobrazenia.

Niektoré zhodné zobrazenie môžete vysvetliť na príklade:

- Zostrojte obraz trojuholníka v stredovej súmernosti podľa priesečníka výšok trojuholníka.
- V pravouhlej sústave súradníc sú dané body $A[-3;5]$, $B[8; 2]$. Určte súradnice ich obrazov v osovej súmernosti podľa priamky $y = x$.

10. **Osová a stredová súmernosť**

Definujte osovú súmernosť a stredovú súmernosť

Osovú súmernosť môžete interpretovať na príklade:

Dané sú body A, B, C, T' , kde T' je ťažisko trojuholníka $A'B'C'$. Zostrojte trojuholníky ABC a $A'B'C'$, ktoré sú osovo súmerné.

11. **Posunutie a rotácia**

Definujte posunutie a rotáciu

Posunutie môžete dokumentovať na príklade :

Akú rovnicu má obraz priamky $p : y = 2x + 5$ v posunutí určenom orientovanou úsečkou XY , $X[4; 7]$, $Y[5; 0]$.

12. **Podobné zobrazenia v rovine**

Popíšte rovnoľahlosť v rovine.

Rovnoľahlosť môžete dokumentovať na príklade:

Zostrojte obraz trojuholníka ABC v rovnoľahlosti a) $H(T, -0,5)$, b) $H(T, 2)$, kde T je ťažisko trojuholníka.

13. **Pytagorova a Euklidova veta**

Popíšte Euklidove vety a Pytagorovu vetu.

Vety môžete dokumentovať na príklade :

Zostrojte úsečku veľkosti $x = \sqrt{11}$ využitím :

- Pytagorovej vety
- Euklidovej vety o výške
- Euklidovej vety o odvesne

Stereometria:

1. Vymenujte základné geometrické útvary v priestore (bod, priamka, rovina) a definujte vzťahy medzi nimi, čo môžete dokumentovať pri určovaní pravdivostných hodnôt nasledujúcich výrokov týkajúcich sa kocky $ABCDEFGH$.

- bod D leží v rovine AEH
- úsečka CG neleží v rovine DCH
- priamka AE je prvkom roviny ABF
- roviny ABC a DCA sú totožné
- body A, C, G, E ležia v jednej rovine
- body B, D, C neležia v jednej rovine
- priamka HD neleží v rovine BDF

2. Klasifikujte:
 - a) vzájomnú polohu dvoch priamok v priestore
 - b) vzájomnú polohu priamky a roviny
 - c) vzájomnú polohu dvoch rovín
 - d) vzájomnú polohu troch rovín

Klasifikáciu vzájomných polôh môžete dokumentovať pomocou nasledujúcej úlohy:

Body K, L, M sú v tomto poradí stredy hrán EF, FB, FG kocky $ABCDEFGH$. Určte vzájomnú polohu :

- a) priamok KL, EM
 - b) priamok KM, EG
 - c) rovín KLM, EFG
 - d) rovín KLM, DBF
 - e) priamky CK s rovinou ADH
 - f) rovín KLM, ACH
3. Vysvetlite obsah pojmov: sústava súradníc v priestore, vektor, umiestnenie vektora, súradnice vektora, opačný vektor, súčet a rozdiel vektorov.
 4. Vysvetlite obsah pojmov: násobok vektora číslom, skalárny súčin vektorov, dĺžka vektora, kolmost' a uhol vektorov.
 5. Vysvetlite obsah pojmov: smerový vektor (priamky a roviny), parametrické rovnice priamky a roviny, normálový vektor roviny, všeobecná rovnica roviny.
 6. Definujte uhol dvoch priamok, uhol dvoch rovín, uhol priamky s rovinou.
 7. Definujte vzdialenosť dvoch lineárnych útvarov (dvoch bodov, bodu od roviny, bodu od priamky, vzdialenosť rovnobežných rovín)

Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika:

1. Vysvetlite pojmy **podmienená pravdepodobnosť** a **nezávislé javy**. Môžete ich ozrejmiť na príklade: V krabičke je 6 jahodových a 10 citrónových cukríkov. Aká je pravdepodobnosť, že druhý, ktorý náhodne vytiahnem bude citrónový? Aká je pravdepodobnosť, že prvý ktorý vytiahnem bude citrónový, ten potom vrátim späť a druhý, ktorý potiahnem bude jahodový?
2. Vysvetlite pojem **nezávislosť javov** a môžete to interpretovať na príklade: Dve rádiové stanice prijímajú signály nezávisle od seba. Pravdepodobnosť príjmu u prvej je 0,85, druhá zo staníc zachytí 90 zo 100 vyslaných signálov. Aká je pravdepodobnosť správneho príjmu:
 - a) oboch staníc naraz
 - b) aspoň jednou z týchto staníc
 Aká je pravdepodobnosť, že ani jedna zo staníc nezachytí vyslaný signál?
3. Vysvetlite **Bernoulliho schému** (vetu) , môžete ju interpretovať na ľubovoľnej úlohe, alebo použiť príklad: Dlhodobým výskumom sa dokázalo, že daná zubná pasta má výrazne bieliace účinky u 65% testovaných osôb. Určte pravdepodobnosť, že z desiatich ľudí, ktorí ju budú používať sa najviac u dvoch neobjaví želaný bieliaci efekt.
4. Definujte **štatistický súbor, modus, medián, smerodajnú odchýlku a rozptyl**. Môžete ich ozrejmiť na príklade: V klasifikačnom zázname sa v skupine španielčínárov objavili po pondelkovej písomke tieto známky: **5 ; 1 ; 2 ; 2 ; 1 ; 1 ; 1 ; 4 ; 3 ; 3 ; 1 ; 1 ; 2 ; 1** . Určte priemernú známku, modus, medián, smerodajnú odchýlku a rozptyl.
5. Vysvetlite **charakteristiky polohy** a **charakteristiky variability**. Môžete použiť nasledujúci príklad: Pri desiatich opakovaných meraniach istej fyzikálnej veličiny sme dostali výsledky: $x_1 = 2,11; x_2 = 2,09; x_3 = 2,01; x_4 = 2,02; x_5 = 2,03; x_6 = 2,03; x_7 = 2,11; x_8 = 2,10; x_9 = 2,05; x_{10} = 2,05$. Vypočítajte priemernú hodnotu merania, smerodajnú odchýlku, rozptyl a variačný koeficient.

6. Čo je to **koeficient korelácie**, aké hodnoty môže nadobúdať? V akých jednotkách sa udáva? Môžete použiť nasledujúcu úlohu:
V tabuľke sú uvedené výsledky piatich žiakov, testovaných z matematiky a fyziky. Z každého z testov sa dalo získať maximálne 15 bodov. Z čiastočného spracovania testov vyplýva, že z matematiky získali študenti priemerne 11 bodov, z fyziky 9,2 bodu. Smerodajná odchýlka pri teste z matematiky bola 2,4 bodu a pri teste z fyziky 2,2 bodu. Aký bol koeficient korelácie medzi obidvoma predmetmi?
- | | Z1 | Z2 | Z3 | Z4 | Z5 |
|------------|----|----|----|----|----|
| Matematika | 9 | 11 | 15 | 12 | 8 |
| Fyzika | 7 | 7 | 13 | 10 | 9 |
7. Vysvetlite **rozdiel medzi variáciami s opakovaním, bez opakovania a permutáciami**. Môžete to ukázať na príklade:
K dispozícii máme cifry: 1,2,3,5,7,9
- Koľko štvorciferných čísel z nich môžeme utvoriť, ak sa v nich každá cifra môže opakovať najviac raz?
 - Koľko štvorciferných čísel z nich môžeme utvoriť, ak sa cifry v číslach môžu opakovať?
 - Koľko šesťciferných čísel z nich môžeme vytvoriť, ak opakovanie cifier v číslach nie je povolené?
8. Definujte **permutácie**, môžete použiť nasledujúci príklad:
Na cd-stojane je poukladaných 15cd-nosičov, medzi ktorými sú 4 s vážnou hudbou. Určte:
- koľko rôznych poukladaní všetkých cd-nosičov existuje
 - koľkými spôsobmi ich môžem poukladať ak chcem, aby tie s vážnu hudbou stáli kdekoľvek, no pri sebe a v ľubovoľnom poradí
 - koľkými spôsobmi ich môžem poukladať ak chcem, aby tie s vážnu hudbou stáli kdekoľvek, no pri sebe a vo vopred určenom poradí.
 - koľkými spôsobmi ich môžem poukladať ak chcem, aby tie s vážnu hudbou stáli na začiatku, no v určenom poradí.
 - koľkými spôsobmi ich môžem poukladať ak chcem, aby tie s vážnu hudbou stáli na začiatku, no v ľubovoľnom poradí.
9. Definujte **kombinácie** a vysvetlite rozdiel medzi kombináciami s opakovaním a bez opakovania . Môžete použiť nasledujúci príklad.
V poštovom novinovom stánku majú 10 druhov pohľadníc. Určte
- Koľko existuje možností na nákup dvanástich pohľadníc
 - Koľko existuje možností na nákup ôsmich pohľadníc
 - Koľko existuje možností na nákup ôsmich rôznych pohľadníc
 - Ak tam je 7 druhov pohľadníc k narodeninám a 3 druhy pohľadníc nášho mesta koľko existuje možností na nákup 3 rôznych pohľadníc tak, aby medzi nimi bola aspoň jedna pohľadnica mesta ?
10. Definujte pojem **variácia a kombinácia**. Vysvetlite rozdiel medzi nimi. Zapíšte spôsob vyjadrenia počtu variácií a kombinácií pomocou faktoriálov.
11. Definujte pojem **pravdepodobnosť javu, doplnková pravdepodobnosť javu**, uveďte vzťahy a vlastnosti pre pravdepodobnosť udalosti A a doplnkovej udalosti A^c .
12. Definujte a napíšte **binomickú vetu** (binomický rozvoj). Koeficienty binomického rozvoja zoradte do Pascalovho trojuholníka. Uveďte vzťah pre ľubovoľný k -ty člen binomického rozvoja.

Infinitezimálny počet (úroveň A):

1. Vyslovte definíciu pre limitu funkcie v bode a . Definíciu doplňte grafickým znázornením. Uveďte základné pravidlá pre výpočet limity ľubovoľnej polynomickej funkcie (limita súčtu, limita reálneho násobku funkcie...).
2. Vysvetlite geometrický a fyzikálny význam derivácie.
3. Daná je funkcia $f: y = \sqrt{x}$. Pomocou definície pre deriváciu funkcie v bode a , vypočítajte jej deriváciu v bode a) 0,25 b) 1 (a) 1 ; b) 0,5)

4. Opíšte limitný proces vedúci k nájdeniu smernice dotyčnice ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode a .
Opisovaný postup aplikujte pre funkciu $f: y = \frac{1}{x}$ v bode $[2; \frac{1}{2}]$ ($x + 4y - 4 = 0$)

5. Vyslovte pravidlá pre deriváciu súčinu a podielu funkcií. Pomocou týchto pravidiel určte deriváciu funkcií:

$$f: y = (x+3)x^2 \quad g: y = (x^3 - 2x + 1)(x^3 + 2x + 2) \quad h: y = \frac{3x-5}{x^2+1} \quad i: y = \frac{1}{x^2}$$

6. Vyslovte vety pre určenie intervalov monotónnosti funkcie a hľadanie lokálnych a globálnych extrémov funkcie.

7. Vyslovte definíciu, že číslo b je limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (alebo tiež, že postupnosť konverguje k číslu b).

Na základe definície ukážte, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad \text{pre } |q| < 1$

8. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nekonečná geometrická postupnosť s kvocientom q
 - zapíšte výraz, ktorý nazývame nekonečným geometrickým radom
 - definujte postupnosť čiastočných súčtov nekonečného geometrického radu
 - aká je podmienka konvergencie nekonečného geometrického radu?
 - zapíšte vzťah pre súčet nekonečného geometrického radu
 - zistite, či rad $\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots$ konverguje a ak áno, nájdite jeho súčet (2)

9. Definujte primitívnu funkciu F k funkcii f na intervale (a, b)
 - je primitívna funkcia F k funkcii f jednoznačne určená?
 - koľko existuje primitívnych funkcií k funkcii f a čím sa líšia?
 - ako nazývame primitívnu funkciu F k funkcii f a akým symbolom ju označujeme?

10. Vyslovte a zapíšte **Newtonovu-Leibnizovu formulu** pre výpočet obsahu S útvaru ohraničeného priamkami $x = a$, $x = b$, osou o_x a grafom spojitej funkcie $y = f(x)$.
Prakticky aplikujte danú formulu pre priamky $x = 1$, $x = 4$ a graf funkcie $y = x^2 - 1$ (18)

11. Nech A je plocha ohraničená grafmi dvoch spojitých funkcií. Vyjadrite pomocou integrálu veľkosť plochy $\{[x; y] \in R^2; x \in \langle a; b \rangle \wedge f(x) \leq y \leq g(x)\}$