

**Zadania :**

1. Riešte rovnicu  $\sqrt{x^2 + 3x + 6} = 3 - \sqrt{x^2 + 7x + 11}$ .

(3 body)

2. V nepriehľadnom vrecku je 10 červených guľiek. Najmenej koľko bielych guľiek musíme vložiť do tohto vrecka, aby pravdepodobnosť, že náhodne vytiahnutá guľka bude červená, bola menšia ako 30 %?

(3 body)

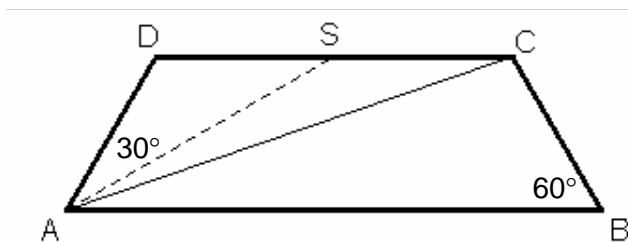
3. Základne pravidelného zrezaného ihlana  $ABCDEFGH$  sú štvorce so stranami 6 cm a 12 cm, jeho plášť sa skladá zo štyroch zhodných rovnoramenných lichobežníkov. Vypočítajte výšku tohto zrezaného ihlana, ak viete, že obsah jeho plášťa sa rovná súčtu obsahov základní.

(4 body)

4. V rovine sú dané body  $A[0; 0]$ ,  $B[6; 0]$ . Nájdite a narysujte množinu všetkých takých bodov  $C$  roviny, že  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sú vrcholmi trojuholníka, v ktorom  $|AC| = 2 \cdot |BC|$ .

(5 bodov)

- 5a. V rovnoramennom lichobežníku  $ABCD$  má uhol  $\angle DAB$  veľkosť  $60^\circ$  a os tohto uhla prechádza stredom  $S$  základne  $CD$ . Uhlopriečka  $AC$  má dĺžku 21 m. S presnosťou na milimetre vypočítajte obvod lichobežníka  $ABCD$ .



(5 bodov)

- 5b. Funkcia  $f: y = x^2 - 6x - 40$  vznikla súčinom lineárnej funkcie  $g$  a k nej inverznej funkcie  $g^{-1}$ . Nájdite predpis funkcie  $g$ .

(5 bodov)

**Riešenia a hodnotenie :**

1. Riešte rovnicu  $\sqrt{x^2 + 3x + 6} = 3 - \sqrt{x^2 + 7x + 11}$ .

(3 body)

**Riešenie**

(1. krok) Po umocnení oboch strán rovnice na druhú postupne dostaneme

$$x^2 + 3x + 6 = 9 - 6\sqrt{x^2 + 7x + 11} + x^2 + 7x + 11, \quad (1)$$

$$6\sqrt{x^2 + 7x + 11} = 4x + 14, \quad (2)$$

$$3\sqrt{x^2 + 7x + 11} = 2x + 7. \quad (3)$$

Po opätovnom umocnení máme

$$9x^2 + 63x + 99 = 4x^2 + 28x + 49, \quad (4)$$

$$5x^2 + 35x + 50 = 0, \quad (5)$$

$$x^2 + 7x + 10 = 0. \quad (6)$$

Koreňmi rovnice (6) sú čísla

$$x_1 = -5, \quad x_2 = -2,$$

teda riešením pôvodnej rovnice môže byť len niektoré z nich.

(2. krok – skúška správnosti) Rozhodnúť, ktoré z čísel  $x_1 = -5$ ,  $x_2 = -2$  je hľadaným riešením, možno jedným z nasledujúcich postupov:

- Dosadením hodnôt  $x_1$ ,  $x_2$  do pôvodnej rovnice  $\sqrt{x^2 + 3x + 6} = 3 - \sqrt{x^2 + 7x + 11}$  zistíme, že  $x_2 = -2$  je a  $x_1 = -5$  nie je jej riešením;
- Hľadané riešenie je to z čísel  $x_1$ ,  $x_2$ , pre ktoré sú splnené tieto podmienky:
  - (a)  $x^2 + 7x + 11 \geq 0$  (teda  $x$  patrí do definičného oboru pravej strany pôvodnej rovnice; ľavá strana pôvodnej rovnice je definovaná pre všetky  $x \in \mathbb{R}$ ),
  - (b)  $3 - \sqrt{x^2 + 7x + 11} \geq 0$  (pre tieto  $x$  je pôvodná rovnica ekvivalentná s rovnicou (1)),
  - (c)  $2x + 7 \geq 0$  (pre hodnoty  $x$  spĺňajúce podmienky (a) a (c) sú rovnice (3) a (4) ekvivalentné).

Dosadením čísel  $x_1$ ,  $x_2$  do týchto podmienok zistíme, že len pre  $x_2 = -2$  sú splnené všetky tri (číslo  $x_1 = -5$  spĺňa prvé dve, ale nespĺňa tretiu).

**Riešením rovnice je číslo  $-2$ .**

**Poznámka.** Množinou  $M_1$  všetkých riešení nerovnice z podmienky (a) je

$$M_1 = \left( -\infty; \frac{-7 - \sqrt{5}}{2} \right) \cup \left( \frac{-7 + \sqrt{5}}{2}; \infty \right),$$

podmienka (b) je splnená pre

$$x \in M_2 = M_1 \cap \left( \frac{-7 - \sqrt{41}}{2}; \frac{-7 + \sqrt{41}}{2} \right) = \left( \frac{-7 - \sqrt{41}}{2}; \frac{-7 - \sqrt{5}}{2} \right) \cup \left( \frac{-7 + \sqrt{5}}{2}; \frac{-7 + \sqrt{41}}{2} \right),$$

podmienka (c) pre

$$x \in M_3 = \left\langle -\frac{7}{2}; \infty \right\rangle.$$

Prienikom týchto troch množín je

$$M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \left\langle \frac{-7 + \sqrt{5}}{2}; \frac{-7 + \sqrt{41}}{2} \right\rangle;$$

na tejto množine je teda rovnica (6) ekvivalentná s pôvodnou rovnicou.

### Hodnotenie

- |  |                 |
|--|-----------------|
| • za rovnicu (6)                               | <b>1 bod</b>    |
| z toho za rovnicu (1)                          | <b>0,5 bodu</b> |
| • za výpočet koreňov rovnice (6)               | <b>0,5 bodu</b> |
| • za preverenie, že $x_2 = -2$ je riešením     | <b>0,5 bodu</b> |
| • za preverenie, že $x_1 = -5$ nie je riešením | <b>0,5 bodu</b> |
| • za odpoveď                                   | <b>0,5 bodu</b> |

2. V nepriehľadnom vrecku je 10 červených guliek. Najmenej koľko bielych guliek musíme vložiť do tohto vrečka, aby pravdepodobnosť, že náhodne vyťahnutá guľka bude červená, bola menšia ako 30 %?

(3 body)

### Riešenie

Nech  $x$  je počet bielych guliek, potom pravdepodobnosť, že náhodne vyťahnutá guľka bude červená, je

$$P = \frac{10}{10+x}. \quad (1)$$

Podľa zadania má platiť  $P < 0,3$ , teda hľadané  $x$  je riešením nerovnice

$$\frac{10}{10+x} < 0,3; \quad (2)$$

postupnými úpravami dostaneme

$$10 < 3 + 0,3x, \quad (3)$$

$$7 < 0,3x,$$

$$x > \frac{70}{3} = 23,3. \quad (4)$$

Hľadané  $x$  je prirodzené číslo; najmenšie prirodzené číslo spĺňajúce nerovnosť (3) je  $x = 24$ .

**Do vrečka treba vložiť aspoň 24 bielych guliek.**

**Poznámka.** Rovnicu (3) možno dostať aj touto úvahou: pomer počtu červených guliek k počtu bielych guliek musí byť menší ako 3 : 7, tj.

$$\frac{10}{x} < \frac{3}{7}. \quad (5)$$

### Hodnotenie

- za nerovnicu, ktorej riešením má byť číslo  $x$  (napr. (2), (5)) **1,5 bodu**
- z toho za vyjadrenie pravdepodobnosti vyťahnutia červenej guľky (výraz (1)) **1 bod**
- za vyriešenie nerovnice (2) **0,5 bodu**
- za hodnotu  $x = 24$  získanú správnym postupom **0,5 bodu**
- za odpoveď **0,5 bodu**

3. Základne pravidelného zrezaného ihlana  $ABCDEFGH$  sú štvorce so stranami 6 cm a 12 cm, jeho plášť sa skladá zo štyroch zhodných rovnoramenných lichobežníkov. Vypočítajte výšku tohto zrezaného ihlana, ak viete, že obsah jeho plášťa sa rovná súčtu obsahov základní.

(4 body)

### Riešenie

#### Riešenie I.

Nech  $m$  je výška rovnoramenného lichobežníka  $ABFE$ , podľa zadania má platiť

$$4 \cdot \frac{6+12}{2} \cdot m = 6^2 + 12^2, \quad (1)$$

odtiaľ 
$$36m = 180,$$

$$m = 5.$$

Výšku  $v$  ihlana môžeme teraz nájsť jednou z nasledujúcich úvah:

- Rezom daného ihlana rovinou, ktorá je rovnobežná s hranou  $AB$  alebo  $BC$  a je kolmá na základňu  $ABCD$ , je rovnoramenný lichobežník, ktorý má základne dĺžok  $a = 12$  cm a  $b = 6$  cm a ramená dĺžky  $m = 5$  cm. Hľadaná výška  $v$  ihlana je výškou tohto lichobežníka.

Podľa Pytagorovej vety platí

$$v^2 = m^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2, \quad (2)$$

po dosadení 
$$v^2 = 25 - \left(\frac{12-6}{2}\right)^2 = 16,$$

$$v = 4 \text{ cm.}$$

- Z Pytagorovej vety môžeme vypočítať dĺžku  $|AE|$  ramena lichobežníka  $ABFE$

$$|AE|^2 = \left(\frac{|AB|-|EF|}{2}\right)^2 + m^2,$$

po dosadení 
$$|AE|^2 = \left(\frac{12-6}{2}\right)^2 + 5^2 = 34,$$

$$|AE| = \sqrt{34} \text{ cm.}$$

Rovnoramenný lichobežník  $ACGE$  má základne dĺžok  $|AC| = 12\sqrt{2}$  a  $|EG| = 6\sqrt{2}$  (sú nimi uhlopriečky štvorca so stranou dĺžky 12 cm, resp. 6 cm) a ramená dĺžky  $|AE| = |CG| = 5$  cm. Hľadaná výška  $v$  ihlana je výškou tohto lichobežníka.

Podľa Pytagorovej vety platí

$$v^2 = |AE|^2 - \left(\frac{|AC|-|EG|}{2}\right)^2, \quad (3)$$

po dosadení 
$$v^2 = 34 - \left(\frac{12\sqrt{2}-6\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 16,$$

$$v = 4 \text{ cm.}$$

**Výška ihlana  $ABCDEFGH$  má veľkosť  $v = 4$  cm.**

**Riešenie II.**

Zvoľme v priestore súradnicovú sústavu tak, aby platilo  $A[-6; -6; 0]$ ,  $C[6; 6; 0]$ . Zvyšné vrcholy budú mať potom súradnice  $B[6; -6; 0]$ ,  $D[-6; 6; 0]$ ,  $E[-3; -3; v]$ ,  $F[3; -3; v]$ ,  $G[3; 3; v]$ ,  $H[-3; 3; v]$ . Označme  $m$  výšku rovnoramenného lichobežníka  $BCGF$ , podľa zadania má platiť

$$4 \cdot \frac{6+12}{2} \cdot m = 6^2 + 12^2 . \quad (4)$$

Číslo  $m$  je dĺžkou úsečky  $GX$ , kde bod  $X[6; 3; 0]$  je priesečníkom priamky  $\overline{BC}$  a priemetu priamky  $\overline{HG}$  do roviny  $xy$  (v rovine  $xy$  má priamka  $\overline{BC}$  rovnicu  $x = 6$  a priemet priamky  $\overline{HG}$  rovnicu  $y = 3$ ), teda

$$m = |GX| = \sqrt{(3-6)^2 + (3-3)^2 + (v-0)^2} = \sqrt{9+v^2} . \quad (5)$$

Dosadením (5) do (4) dostávame

$$\begin{aligned} 36\sqrt{9+v^2} &= 180, \\ 9+v^2 &= 25, \\ v &= 4 \text{ (cm)} . \end{aligned}$$

**Výška ihlana  $ABCDEFGH$  má veľkosť  $v = 4$  cm.**

**Hodnotenie**

- |  |                 |
|--|-----------------|
| • za výpočet alebo vyjadrenie veľkosti $m$ (napr. (1))                 | <b>1 bod</b>    |
| • za vyjadrenie vzťahu medzi $m$ a $v$ (napr. (2) alebo (3) alebo (5)) | <b>1,5 bodu</b> |
| • za veľkosť $v$ nájdenú správnym spôsobom                             | <b>1 bod</b>    |
| • za odpoveď   | <b>0,5 bodu</b> |

4. V rovine sú dané body  $A[0; 0]$ ,  $B[6; 0]$ . Nájdite a narysujte množinu všetkých takých bodov  $C$  roviny, že  $A, B, C$  sú vrcholmi trojuholníka, v ktorom  $|AC| = 2 \cdot |BC|$ .

(5 bodov)

### Riešenie

Bod  $C$  musí spĺňať dve podmienky:

- Body  $A, B, C$  majú byť vrcholmi trojuholníka, preto bod  $C$  nesmie ležať na priamke  $AB$  (tj. na osi  $x$ );
- Má platiť  $|AC| = 2 \cdot |BC|$ , tj.

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-6)^2 + y^2}, \quad (1)$$

odtiaľ postupne dostávame

$$x^2 + y^2 = 4(x^2 - 12x + 36 + y^2),$$

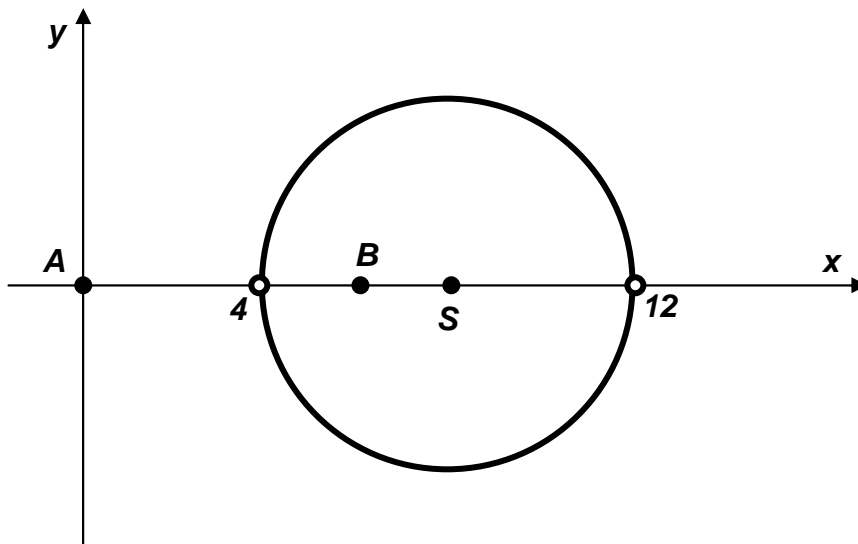
$$3x^2 + 3y^2 - 48x + 144 = 0,$$

$$x^2 - 16x + 48 + y^2 = 0,$$

$$(x-8)^2 + y^2 = 16. \quad (2)$$

Rovnica (2) je rovnicou kružnice so stredom  $S[8; 0]$  a polomerom  $r = 4$ .

Hľadanou množinou bodov je teda kružnica  $k$  so stredom  $S[8; 0]$  a polomerom  $r = 4$  bez jej priesečníkov s osou  $x$  (tj. bez bodov  $[4; 0]$  a  $[12; 0]$ ).



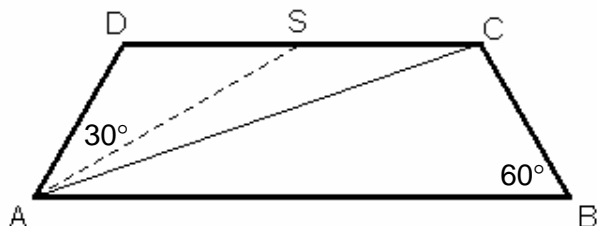
### Hodnotenie

- za rovnicu (1) **1 bod**
- za zistenie, že rovnica (2) je rovnicou kružnice (buď v texte alebo na obrázku) **0,5 bodu**
- za určenie súradníc stredu  $S$  kružnice  $k$  (buď v texte alebo na obrázku) **1 bod**
- za určenie polomeru  $r$  kružnice  $k$  (buď v texte alebo na obrázku) **1 bod**
- za konštatovanie alebo vyznačenie faktu, že žiadny prvok hľadanej množiny neleží na osi  $x$  **1 bod**
- za správne narysovaný obrázok (musia byť zrejmé súradnice stredu  $S$ , veľkosť polomeru  $r$  a na obrázku musia byť vyznačené body kružnice  $k$ , ktoré nepatria do hľadanej množiny) **0,5 bodu**



- 5a. V rovnoramennom lichobežníku  $ABCD$  má uhol  $\angle DAB$  veľkosť  $60^\circ$  a os tohto uhla prechádza stredom  $S$  základne  $CD$ . Uhlopriečka  $AC$  má dĺžku 21 m. S presnosťou na milimetre vypočítajte obvod lichobežníka  $ABCD$ .

(5 bodov)



### Riešenie

Označme  $x$  veľkosť úsečky  $DS$ . Uhol  $\angle ASD$  má veľkosť  $30^\circ$  (uhly  $\angle ASD$  a  $\angle SAB$  sú striedavé a  $|\angle SAB| = 30^\circ$ ), preto trojuholník  $ASD$  je rovnoramenný. Platí teda

$$|AD| = |DS| = |SC| = x. \quad (1)$$

Nech  $E$  je päta kolmice z  $D$  na  $AB$ . Potom

$$|AB| = |DC| + 2|AE| = 2x + 2|AE|, \quad (2)$$

prítom z pravouhlého trojuholníka  $ADE$  (v ktorom  $|\angle DAE| = 60^\circ$ ) dostávame

$$|AE| = |AD| \cdot \cos 60^\circ = \frac{|AD|}{2} = \frac{x}{2}. \quad (3)$$

Dosadením (3) do (2) máme

$$|AB| = 3x,$$

teda obvod  $O$  lichobežníka  $ABCD$  je

$$O = |AB| + |BC| + |CD| + |DE| = 3x + x + 2x + x = 7x. \quad (4)$$

Pri výpočte neznámej dĺžky  $x$  môžeme použiť niektorý z nasledujúcich postupov:

- v trojuholníku  $ACD$  so stranami 21,  $2x$ ,  $x$  a uhlom  $120^\circ$  pri vrchole  $D$  použijeme kosínusovú vetu

$$|AC|^2 = |CD|^2 + |AD|^2 - 2 \cdot |CD| \cdot |AD| \cdot \cos 120^\circ,$$

po dosadení

$$441 = 4x^2 + x^2 - 2 \cdot 2x \cdot x \cdot \cos 120^\circ = 7x^2,$$

odtiaľ

$$x = \sqrt{63} \text{ (cm)}.$$

- v trojuholníku  $ACB$  so stranami 21,  $x$ ,  $3x$  a uhlom  $60^\circ$  pri vrchole  $B$  použijeme kosínusovú vetu

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos 60^\circ,$$

po dosadení

$$441 = 9x^2 + x^2 - 2 \cdot 3x \cdot x \cdot \cos 60^\circ = 7x^2,$$

odtiaľ

$$x = \sqrt{63} \text{ (cm)}.$$

- v trojuholníku  $ASD$  (kde  $|AD| = |DS| = x$ ,  $|\angle ADS| = 120^\circ$ ) vyjadríme  $|AS|$  použitím kosínusovej vety

$$|AS|^2 = |AD|^2 + |DS|^2 - 2 \cdot |AD| \cdot |DS| \cdot \cos 120^\circ = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3x^2,$$

potom použijeme kosínusovú vetu v trojuholníku ASC (so stranami  $\sqrt{3}x$ ,  $x$ , 21 a uhlom  $150^\circ$  pri vrchole S)

$$|AC|^2 = |AS|^2 + |CS|^2 - 2 \cdot |AS| \cdot |CS| \cdot \cos 150^\circ,$$

po dosadení

$$441 = 3x^2 + x^2 - 2 \cdot \sqrt{3}x \cdot x \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 7x^2,$$

odtiaľ  $x = \sqrt{63}$  (cm).

Podľa (4) má potom hľadaný obvod O veľkosť

$$O = 7x = 7 \cdot \sqrt{63} = 7 \cdot 7,937\ 253\ 933\dots = 55,560\ 777\ 532\dots \cong 55,56\ 08 \text{ (m)}.$$

**Lichobežník má obvod 55,56 08 m (= 55 m 56 cm 8 mm).**

**Poznámky.**

1. Skutočnosť, že uhol  $\angle ASD$  má veľkosť  $30^\circ$ , sme mohli zistiť aj nasledovne:

$$|\angle ADS| = 180^\circ - |\angle BAD| = 120^\circ,$$

potom  $|\angle ASD| = 180^\circ - |\angle SAD| - |\angle ADS| = 180^\circ - 30^\circ - 120^\circ = 30^\circ$ .

2. Na odvodenie rovnosti  $|AE| = \frac{x}{2}$  (pozri (3)) nie je potrebné použitie trigonometrických funkcií; trojuholník DAE je totiž „polovica z rovnostranného trojuholníka“.

**Hodnotenie**

- za zistenie skutočnosti, že  $|AD| = |DS|$  **1 bod**
- za vyjadrenie dĺžky základne AB pomocou dĺžky úsečky DS **1 bod**
- za výpočet veľkosti x **2 body**
- z toho za zápis kosínusovej vety v niektorom z trojuholníkov ABC, ACD, ASD **1 bod**
- za výpočet obvodu lichobežníka s požadovanou presnosťou **0,5 bodu**
- za odpoveď **0,5 bodu**

5b. Funkcia  $f: y = x^2 - 6x - 40$  vznikla súčinom lineárnej funkcie  $g$  a k nej inverznej funkcie  $g^{-1}$ . Nájdite predpis funkcie  $g$ .

(5 bodov)

### Riešenie

#### Riešenie I.

(1. krok) Nech

$$g(x) = ax + b, \quad (1)$$

potom inverzná funkcia  $g^{-1}$  má predpis

$$g^{-1}(x) = \frac{x - b}{a}. \quad (2)$$

Podľa zadania má platiť  $f(x) = g(x) \cdot g^{-1}(x)$ , tj.

$$(ax + b) \cdot \frac{x - b}{a} = x^2 - 6x - 40, \quad (3)$$

po úprave

$$x^2 + \left(\frac{b}{a} - b\right)x - \frac{b^2}{a} = x^2 - 6x - 40, \quad (4)$$

porovnaním koeficientov kvadratických funkcií na ľavej a pravej strane rovnosti (4) dostaneme sústavu

$$\frac{b}{a} - b = -6, \quad (5)$$

$$\frac{b^2}{a} = 40. \quad (6)$$

Pre neznámu  $b$  dostaneme rovnicu

$$b^2 - 6b - 40 = 0 \quad (7)$$

použitím niektorého z nasledujúcich postupov:

- z rovnice (5) vyjadríme  $\frac{b}{a} = b - 6$  a dosadíme do rovnice (6), dostaneme

$$40 = \frac{b^2}{a} = \frac{b}{a} \cdot b = (b - 6) \cdot b,$$

$$(b - 6)b = 40, \text{ tj. } b^2 - 6b - 40 = 0.$$

- z rovnice (6) vyjadríme  $a = \frac{b^2}{40}$  a dosadíme do (5), dostaneme

$$\frac{40}{b} - b = -6, \text{ tj. } b^2 - 6b - 40 = 0.$$

- z rovnice (5) vyjadríme  $a = \frac{b}{b - 6}$  a dosadíme do (6), dostaneme

$$\frac{b^2}{\frac{b}{b - 6}} = 40, \text{ tj. } b^2 - 6b - 40 = 0.$$

Koreňmi rovnice (7) sú čísla  $b_1 = 10$ ,  $b_2 = -4$ . Dosadením  $b_1 = 10$  do ľubovoľnej z rovníc (5), (6) dostávame zodpovedajúcu hodnotu  $a_1 = 2,5$ ; podobne dosadením  $b_2 = -4$  dostávame zodpovedajúcu hodnotu  $a_2 = 0,4$ .

(2. krok – skúška správnosti) Inverznou funkciou k funkcii  $y = 2,5x + 10$  je funkcia  $y = 0,4x - 4$  (a naopak). Súčinom týchto funkcií dostaneme

$$(0,4x - 4) \cdot (2,5x + 10) = x^2 - 6x - 40,$$

čo je predpis funkcie  $f$ . Obidve uvedené funkcie sú teda hľadaným riešením.

**Funkcia  $g$  má predpis  $g(x) = 2,5x + 10$  alebo  $g(x) = 0,4x - 4$ .**

**Poznámka.** Sústavu (6), (7) môžeme dostať aj nasledujúcou úvahou:

Rovnosť (3) platí pre všetky  $x \in \mathbb{R}$ , teda aj pre  $x = 0$  a  $x = b$ . Dosadením  $x = 0$  do (3) dostaneme rovnicu

$$b \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) = -40,$$

ktorá je zrejme ekvivalentná s (6), dosadením  $x = b$  do (3) dostaneme priamo rovnicu (7).

## Riešenie II.

(1. krok) Podľa zadania platí

$$f(x) = g(x) \cdot g^{-1}(x),$$

teda každý koreň rovnice

$$f(x) = 0 \tag{8}$$

je buď koreňom rovnice

$$g(x) = 0 \tag{9}$$

alebo rovnice

$$g^{-1}(x) = 0. \tag{10}$$

Pritom funkcia  $g$  (a teda aj funkcia  $g^{-1}$ ) je lineárna, teda (9) aj (10) majú práve 1 koreň. Rovnica (8), tj.

$$x^2 - 6x - 40 = 0$$

má korene  $x_1 = 10$  a  $x_2 = -4$ ; jeden z nich musí byť teda riešením rovnice (9), druhý rovnice (10).

Predpokladajme najprv, že

$$g(10) = 0, \quad g^{-1}(-4) = 0. \tag{11}$$

To znamená, že graf funkcie  $g$  pretína  $x$ -ovú os v bode  $[10; 0]$  a graf funkcie  $g^{-1}$  ju pretína v bode  $[-4; 0]$ . Preto graf funkcie  $g$  (ktorý je súmerný s grafom  $g^{-1}$  podľa priamky  $y = x$ ) pretína  $y$ -ovú os v bode  $[0; -4]$ .

Z toho, že graf lineárnej funkcie  $g$  obsahuje body  $[10; 0]$  a  $[0; -4]$ , vyplýva, že jej predpis má tvar

$$g(x) = 0,4x - 4. \tag{12}$$

Keby sme namiesto (11) predpokladali

$$g(-4) = 0, \quad g^{-1}(10) = 0, \tag{13}$$

musel by graf funkcie  $g$  obsahovať body  $[-4; 0]$  a  $[0; 10]$ , preto jej predpis by bol

$$g(x) = 2,5x + 10. \tag{14}$$

(2. krok – skúška správnosti) Funkcie s predpismi (12) a (13) sú navzájom inverzné a ich súčin je

$$(0,4x - 4) \cdot (2,5x + 10) = x^2 - 6x - 40,$$

teda obidve uvedené funkcie sú hľadaným riešením.

**Funkcia  $g$  má predpis  $g(x) = 2,5x + 10$  alebo  $g(x) = 0,4x - 4$ .**

### Hodnotenie

#### Riešenie I.

- za zápis predpisu funkcie  $g$  v tvare (1) **0,5 bodu**
- za predpis inverznej funkcie  $g^{-1}$  (vzťah (2)) **1 bod**
- za zápis sústavy, ktorej riešením sú neznáme koeficienty  $a, b$  (napr. sústava (5), (6) alebo (6), (7)) **1 bod**
- za vyriešenie získanej sústavy rovníc **1 bod**
- za skúšku správnosti **1 bod**
- za odpoveď **0,5 bodu**

**Poznámka.** Pri riešení sústavy (5), (6) tretím z postupov uvedených v riešení I (teda dosadením  $a = \frac{b}{b-6}$  do rovnice (6)) by žiak mal skontrolovať, že hodnote  $b = 6$  nezodpovedá žiadne riešenie sústavy (5), (6). Podobne by mal v prípade druhého z uvedených postupov riešenia sústavy (5), (6) skontrolovať, že žiadne riešenie nezodpovedá hodnote  $b = 0$ . Ak žiak túto kontrolu nevykonal, ale našiel riešenia danej sústavy, pridelte mu za jej vyriešenie 1 bod (teda nestrhnite žiadne body za túto chýbajúcu úvahu).

#### Riešenie II.

- za nájdenie predpisu jednej z funkcií  $g(x) = 2,5x + 10$ ,  $g(x) = 0,4x - 4$  **2,5 bodu**  
z toho
  - za nájdenie jej priesečníka s osou  $x$  **0,5 bodu**
  - za nájdenie jej priesečníka s osou  $y$  **1 bod**
- za nájdenie predpisu druhej z funkcií  $g(x) = 2,5x + 10$ ,  $g(x) = 0,4x - 4$  **1 bod**
- za skúšku správnosti **1 bod**
- za odpoveď **0,5 bodu**